

1 Exercices CCP

Exercice 1. Algèbre.

On considère la fraction rationnelle

$$R = \frac{X^5 + X^4}{(X - 2)^2(X + 1)^2}.$$

1. Décomposez R en éléments simples.
2. Déterminez les primitives de la fonction $x \mapsto R(x)$ sur $] - 1, 2[$.

Exercice 2. Calcul Différentiel.

Déterminez les extrema locaux et globaux de

$$f(x, y) = y(x^2 + (\ln y)^2) \quad \text{sur } \mathbb{R} \times]0, +\infty[.$$

Exercice 3. Algèbre.

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de A .
2. Déterminez toutes les matrices qui commutent avec $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et déduisez-en l'ensemble des matrices qui commutent avec A .

Exercice 4. Calcul différentiel.

On considère l'espace vectoriel \mathbb{R}^n muni de son produit scalaire usuel, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit f un endomorphisme symétrique de \mathbb{R}^n dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

1. Montrez que, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \langle f(x), x \rangle > 0$.
2. Soient u un vecteur de \mathbb{R}^n et g l'application définie par :

$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto g(x) = \frac{1}{2} \langle f(x), x \rangle - \langle u, x \rangle.$$

Montrez que g admet des dérivées partielles selon tout vecteur de \mathbb{R}^n et les expliciter.

3. Montrez que g admet un unique point critique noté z .
4. Montrez que g admet un minimum global en z .

Exercice 5. *Algèbre.*

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

On admet que pour tout $x \in E$, il existe un unique élément y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose alors $\langle A, A' \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrez que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculez la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

Exercice 6. *Fonction définie par une intégrale.*

1. Donnez le domaine de définition de la fonction

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

2. Calculez l'intégrale

$$I_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

3. Expliquez rapidement pourquoi $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ converge vers e^{-t} et montrez que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Exercice 7. *Algèbre.*

Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) &\longmapsto P(X) - P(X - 1).\end{aligned}$$

Donnez la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et déduisez-en $Im(\phi)$ et $Ker(\phi)$.

Exercice 8. *Suites et séries de fonctions.*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ soit f_n l'application définie par

$$\begin{aligned}f_n(x) &= \frac{2sh(x)}{e^{nx} - 1} && \text{si } x \in]0, +\infty[\\ &\alpha && \text{si } x = 0.\end{aligned}$$

1. Pour quelle valeur de α la fonction f_n est-elle continue ?
Dans la suite on prendra cette valeur pour α .
2. Montrez que f_n est bornée.
3. Montrez que $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ existe pour $n \geq 2$.
4. Exprimez $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ comme la somme d'une série.

Exercice 9. *Algèbre.*

1. Démontrez que si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n alors AB et BA ont même trace.
2. Déduisez-en qu'en dimension finie toutes les matrices d'un même endomorphisme ont même trace.
3. Démontrez que si A et B sont semblables alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k et B^k ont même trace.

Exercice 10. *Complément de calcul intégral.*

1. Esquissez

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, 1 \leq xy \leq 2, 1 \leq x^2 - y^2 \leq 4 \right\}.$$

2. On pose $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > y > 0\}$ et $V = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2, X > 0, Y > 0\}$. Montrez que $\phi(x, y) = (xy, x^2 - y^2)$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de U sur V .
3. Explicitez $\phi(D)$ et calculez

$$I = \int \int_D f(x, y) dx dy \quad \text{où } f(x, y) = \frac{xy(x^2 + y^2)}{x^2 - y^2}.$$

4. Etudiez les extrêma de f .
-

Exercice 11. *Analyse.*

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$. Démontrez que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminez le signe au voisinage de l'infini de $u_n = sh(\frac{1}{n}) - \tan(\frac{1}{n})$.

Exercice 12. *Matrices et déterminants.*

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 2$.

1. Indiquez des endomorphismes de E dont la représentation matricielle est la même dans toutes les bases de E .
 2. Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E . Montrer que pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$ la famille $(e_1 + e_i, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E .
 3. Déterminez tous les endomorphismes de E dont la représentation matricielle est diagonale dans toutes les bases de E .
 4. Quels sont les endomorphismes de E dont la représentation matricielle est la même dans toutes les bases de E ?
-

Exercice 13. *Analyse.*

1. Soit X une partie de \mathbb{R} , $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonction de X dans \mathbb{R} convergeant simplement vers une fonction f . On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0. Démontrez que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur X .

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.
- Etudiez la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - Etudiez la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$) puis sur $]0, +\infty[$.

Exercice 14. Réduction des endomorphismes.

Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E .

- Si $\lambda \neq 0$ est une valeur propre de $u \circ v$, montrer que λ est alors aussi valeur propre de $v \circ u$.
- Pour $P \in \mathbb{R}[X] = E$, on pose

$$u(P) = P' \quad \text{et} \quad v(P) = \int_0^X P(t)dt,$$

ce qui définit des endomorphismes de E . Déterminer $\text{Ker}(u \circ v)$ et $\text{Ker}(v \circ u)$.

- Montrez que la propriété de la première question reste valable pour $\lambda = 0$ si l'espace E est de dimension finie.

Exercice 15. Analyse.

- Démontrez que si $|a_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |b_n|$ alors les séries entières $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ ont même rayon de convergence.
- Trouvez le rayon de convergence de la série entière $\sum_n \frac{i^n n^2}{n^2+1} z^n$ (où $i^2 = -1$).

Exercice 16. Eléments d'algèbre linéaire.

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} vérifiant $f \circ g = id$.

- Montrez que $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$.
- Montrez que

$$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g).$$

- Dans quel(s) cas peut-on conclure que $g = f^{-1}$?
- Calculez $(g \circ f) \circ (g \circ f)$ et caractérissez $g \circ f$.

Exercice 17. Analyse.

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . On pose pour tout f dans E :

$$p_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \quad \text{et} \quad p_1 = \int_0^1 |f(x)| dx.$$

- Démontrez succinctement que p_∞ et p_1 sont deux normes sur E .
- Démontrez qu'il existe $k > 0$ tel que , pour tout f de E , $p_1(f) \leq k p_\infty(f)$.
- Démontrez que tout ouvert pour la norme p_1 est un ouvert pour la norme p_∞ .

2. Démontrez que les normes p_1 et p_∞ ne sont pas équivalentes.

Exercice 18. *Réduction des endomorphismes.*

On considère E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E , $U = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de u dans une base de E , $e_{i,j}$ les projecteurs de $\mathcal{L}(E)$ associés à cette base et $E_{i,j}$ la matrice de ces projecteurs. On considère φ l'endomorphisme dans $\mathcal{L}(E)$ tel que

$$\varphi(v) = u \circ v.$$

1. Montrez que φ et u ont les mêmes valeurs propres.
2. Calculez $UE_{i,j}$ en fonction de $E_{k,j}$, $1 \leq i, j, k \leq n$. En déduire qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale par blocs.
3. Exprimez cette matrice.

Exercice 19. *Analyse.*

On considère la série de fonction $\sum_n \frac{(-1)^n}{n} x^n$, x désignant un réel.

1. Étudiez la simple convergence de cette série.
2. On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série.
 - a. Étudiez la convergence normale puis la convergence uniforme de cette série sur D .
 - b. La fonction S est-elle continue sur D ?

Exercice 20. *Endomorphismes des espaces euclidiens.*

Soit E un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et u un endomorphisme de E vérifiant

$$\forall x \in E \quad \langle u(x), x \rangle = 0.$$

1. Montrez que $u^* = -u$.
2. Montrez que l'image et le noyau de u sont supplémentaires.
3. Montrez que le rang de u est pair.

2 Exercices Mines-Centrale

Exercice 21. *Intérieur d'une classe de similitude.*

Soit $M \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ pour $n \geq 2$. Montrez que la classe de similitude de M , définie par :

$$\text{Sim}(M) = \{PMP^{-1}, P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})\}$$

est d'intérieur vide.

Exercice 22. *Terme général intégral.*

Soient f une fonction continue sur $[0, 1]$, à valeurs dans \mathbb{R} et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^1 f(x)x^n dx.$$

1. Montrez que si $\sum u_n$ converge alors $f(1) = 0$.
2. On suppose de plus que f est de classe \mathcal{C}^1 .
Montrez que $\sum u_n$ converge si et seulement si $f(1) = 0$. Exprimez dans ce cas la somme à l'aide d'une intégrale.
3. On suppose ici que $\forall x \in]0, 1[\quad f(x) = x \ln(x)$. Justifiez que f est prolongeable par continuité en 0, donnez alors la valeur de $f(0)$ puis calculez

$$\int_0^1 \frac{x \ln(x)}{1-x} dx.$$

Exercice 23. *Comparaison de rayons de convergence.*

Comparez les rayons de convergence de $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n a_n^2 z^n$.

Exercice 24. *Déterminant tridiagonal.*

Pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$, calculez le déterminant tridiagonal d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Delta_n(\varphi) = \begin{vmatrix} 2ch(\varphi) & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2ch(\varphi) & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2ch(\varphi) & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & & 0 & -1 & 2ch(\varphi) & -1 \\ 0 & \dots & & 0 & -1 & 2ch(\varphi) \end{vmatrix}.$$

Exercice 25. *Transformation d'Abel (sommation par parties).*

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites complexes telles que :

- (i) $\sum_{N \in \mathbb{N}^*} |u_{n+1} - u_n|$ converge et $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- (ii) la suite de terme général $S_n = \sum_{k=1}^n v_k$ est bornée.

1. Justifier que l'on a (i) si par exemple $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0 en décroissant.

2. Montrer que la série $\sum_k u_k v_k$ est convergente.

Exercice 26. *Utilisation des matrices de rang 1.*

Soient \mathbb{K} un corps, $n \geq 2$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

1. Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que $I_n + \lambda H$ soit inversible.
 2. Calculez alors son inverse en fonction de H .
-

Exercice 27. *Une majoration sur les complexes.*

Soient (α, β, x, y) dans $(\mathbb{R}_+^*)^4$. On suppose $\alpha < \beta$ et on pose $z = x + iy$. Prouvez que

$$\left| e^{-\alpha z} - e^{-\beta z} \right| \leq \frac{|z|}{x} (e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}).$$

Exercice 28. *Polynôme de Legendre.*

Pour tout entier naturel n , on définit le polynôme L_n par :

$$L_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k} (X+1)^k.$$

1. Prouvez que $L_n(X) = \frac{1}{2^{n!}} [(X^2 - 1)^n]^{(n)}$. En déduire la parité de L_n et l'égalité

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

2. Soit Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $U_n(X) = (X^2 - 1)^n$ et $0 \leq j \leq n$ montrez que $U_n^{(j)}$ possède au moins j racines distinctes dans $] -1, 1[$. En déduire que $L_n(X)$ est scindé à racines simples dans $] -1, 1[$.
3. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(X^2 - 1)L_n''(X) + 2XL_n'(X) = n(n+1)L_n(X)$.

Exercice 29. *Calcul d'une intégrale impropre.*

Soit $a > 0$, on définit :

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)\right) dx.$$

1. Justifiez la convergence de $I(a)$.
2. Montrez que

$$I(a) = \int_0^{\sqrt{a}} \exp\left(-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)\right) \left(1 + \frac{a}{x^2}\right) dx.$$

Et en déduire la valeur de $I(a)$.

Exercice 30. *Calcul de l'intégrale de Gauss.*

Soit

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-x(1+t^2))}{1+t^2} dt.$$

1. Donnez l'ensemble de définition de f .
 2. Montrez que f est continue sur \mathbb{R}^+ et \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ .
 3. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $I = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.
-

Exercice 31. *Fonction faiblement contractante.*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, K un compact non vide de E et $f : K \rightarrow K$ telle que :

$$\forall (x, y) \in K, x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

1. Démontrez que f possède un unique point fixe, noté l .
 2. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $x_0 \in K$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$.
 3. La première question reste-t-elle vraie si l'on remplace «compact» par «fermé» ?
-

Exercice 32. *Intégrabilité d'une somme.*

Montrer la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+xn+n^2)}{1+n^2e^x} dx.$$

3 Nouvelle Session

Exercice 33. *Algèbre.*

E désigne un espace euclidien. On note $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire de x et de y .

- Si u est un endomorphisme de E , précisez, en justifiant votre réponse, l'endomorphisme $(u^*)^*$.
 - Si u et v sont deux endomorphismes de E , précisez, en justifiant votre réponse, l'endomorphisme $(u \circ v)^*$.
- Soit (e_i) une base orthonormale de E . On note A la matrice d'un endomorphisme u de E dans la base (e_i) et B la matrice de u^* dans la base (e_i) . En justifiant votre réponse, donnez la relation qui existe entre A et B .
 - Retrouver le résultat de la question **1.a.** à l'aide de la question précédente.

Exercice 34. *Séries entières.*

- Trouvez le rayon de convergence de

$$\sum_{n \geq 1} \frac{sh(n)}{n(n+1)} x^n.$$

- Calculez la somme dans le bon intervalle.
-

Exercice 35. *Algèbre.*

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b et c sont des réels.

- La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
- La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 36. *Séries numériques.*

- Déterminez la limite de la suite définie par

$$u_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}.$$

- Déterminez la limite de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = nu_n$.
 - Donnez la nature de la série $\sum_n u_n$ et celle de la série $\sum_n (-1)^n u_n$.
-

Exercice 37. *Algèbre.*

- Démontrez que si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n alors AB et BA ont même trace.
- Déduisez-en qu'en dimension finie toutes les matrices d'un même endomorphisme ont même trace.
- Démontrez que si A et B sont semblables alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k et B^k ont même trace.

Exercice 38. *Espaces normés.*

On munit $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ de la norme

$$\|M\| = \max_{1 \leq i, j \leq p} |m_{i,j}|.$$

1. Soient X un vecteur fixé dans \mathbb{C}^p et P une matrice fixée dans $GL_n(\mathbb{C})$. Montrez que

$$\phi(M) = MX \quad \text{et} \quad \varphi(M) = P^{-1}MP$$

définissent des applications continues.

2. Montrez que $f(M, N) = MN$ définit une application continue.
3. Soit $A \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ telle que la suite $(\|A^n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. Montrez que les valeurs propres de A sont de modules inférieurs ou égaux à 1.
4. Soit $A \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ telle que la suite $(B^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tende vers une matrice C . Montrez que $C^2 = C$. Que conclure à propos du spectre de C ?
Montrez que les valeurs propres de B sont de module au plus égaux à 1.

Exercice 39. *Analyse.*

Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps \mathbb{R} .

1. Démontrez que si f est une application linéaire de E dans F , alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes.

P2 f est continue sur E

P2 f est continue en 0

P2 $\exists k > 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq k \|x\|$

2. Soit E l'espace vectoriel des applications linéaires et continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} muni de la norme définie par :

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

On considère l'application φ de E dans \mathbb{R} définie par :

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t) dt.$$

Démontrez que φ est linéaire et continue.

Exercice 40. *Réduction des endomorphismes.*

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension quelconque, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ ayant 0 comme racine simple et tel que $P(u) = 0$.

1. Montrez que

$$\text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u) \quad \text{et} \quad \text{Im}(u^2) = \text{Im}(u).$$

2. Déduisez-en que

$$E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u).$$

Exercice 41. *Analyse.*

1. Donnez l'idée de la démonstration de la formule de Leibniz, concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions.
2. On pose pour $x > -1$,

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}.$$

Calculez $f^{(n)}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 42. *Endomorphismes des espaces euclidiens.*

Soit u un endomorphisme orthogonal de E , espace euclidien et $v = u - id$.

1. Montrez que $\text{Ker}(u) = (\text{Im}(v))^\perp$.
2. Soit

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k.$$

Montrez que $(u_n(x))_{n \geq 1}$ converge, pour tout vecteur x , vers le projeté orthogonal de x sur $\text{Ker}(v)$.